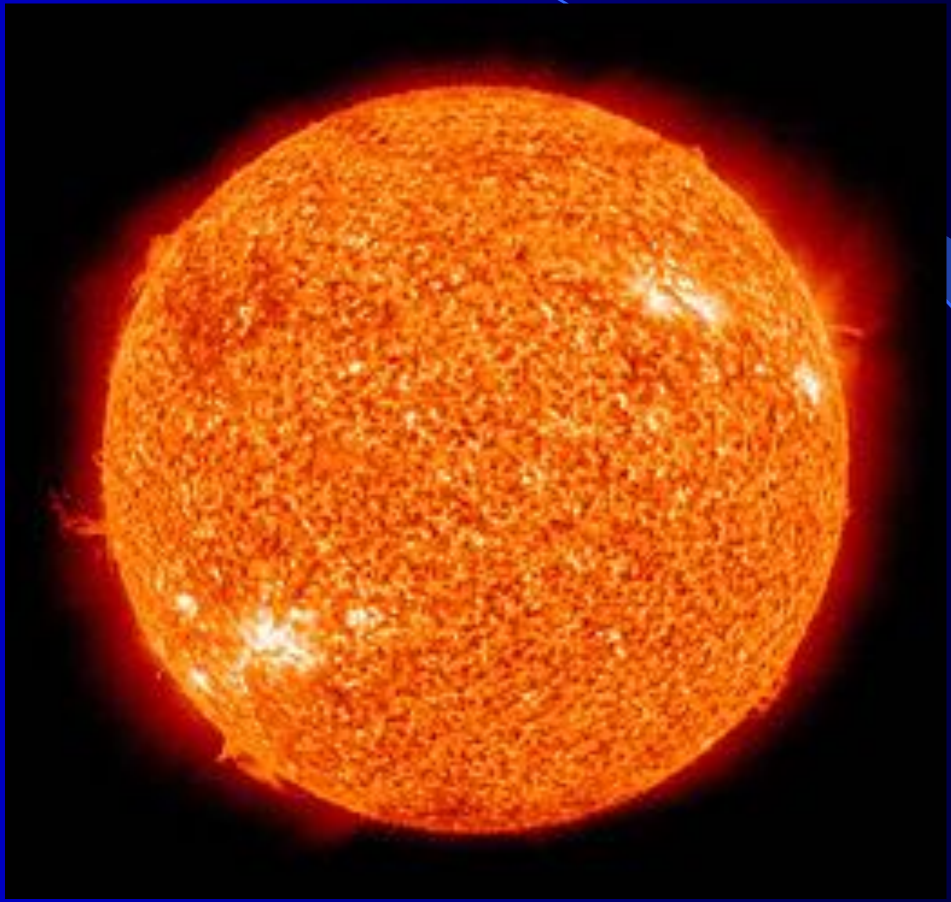
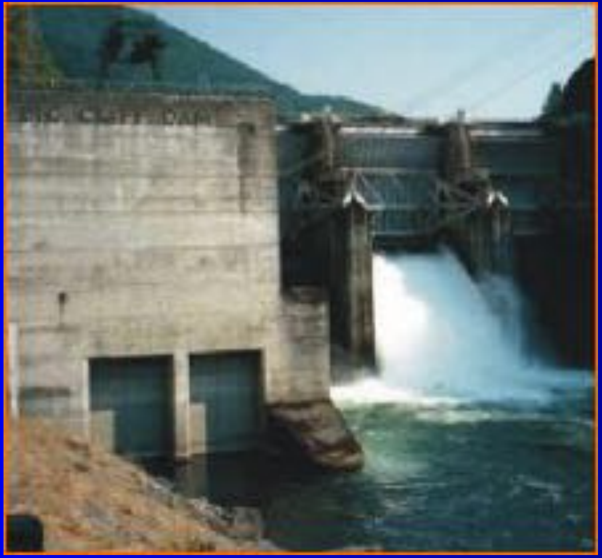
Sistemi autogravitanti e loro approccio numerico

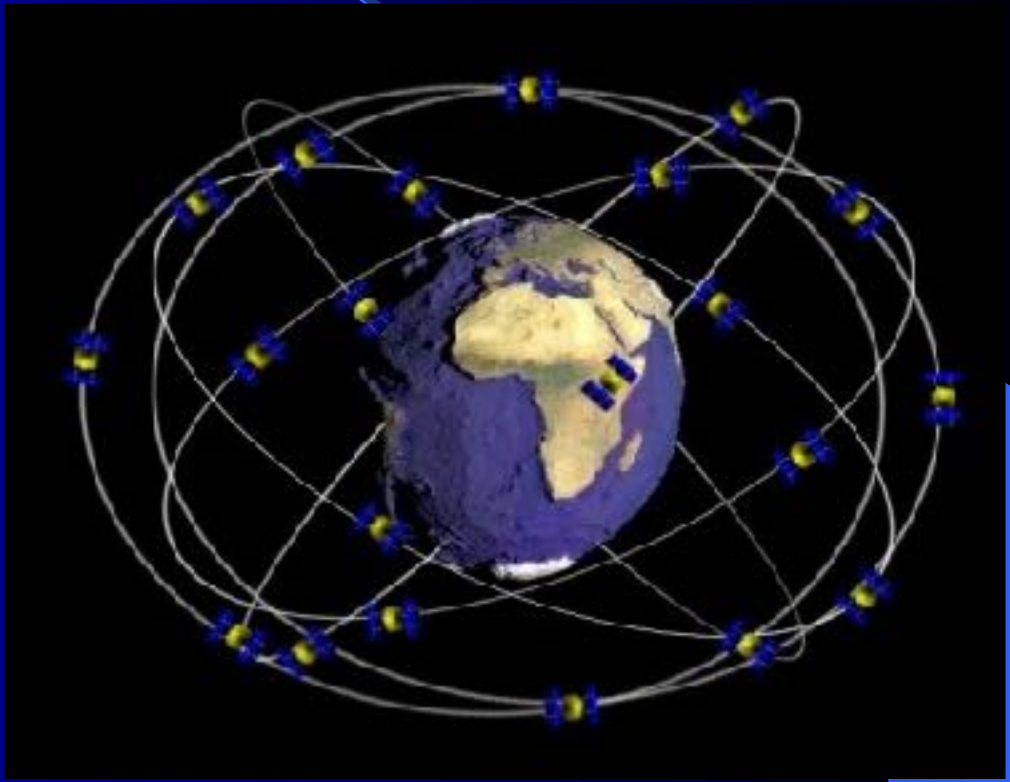
R. Capuzzo Dolcetta
Sapienza, Univ. di Roma
ENEA, Frascati, 5/3/2018

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



La gravità *terrestre*





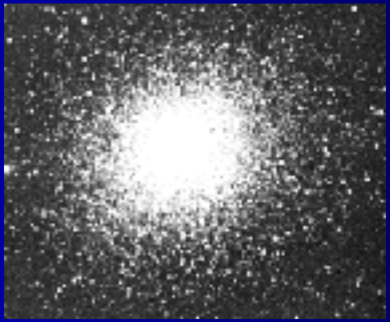
Newtonana e relativstica

$N \leq 10$

Meccanica celeste

$N \leq 10^{12}$

Dinamica stellare



$N \to \infty$

Grande scala, cosmologia

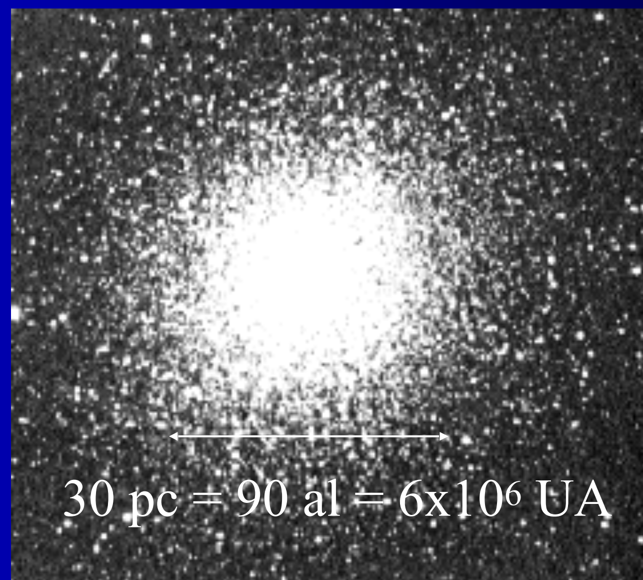
Sistemi autogravitanti…

Peculiarità dell’ astrofisica è il ruolo dell’auto-gravità (self-gravity)

$$\alpha \equiv \text{auto grav/ext grav}$$

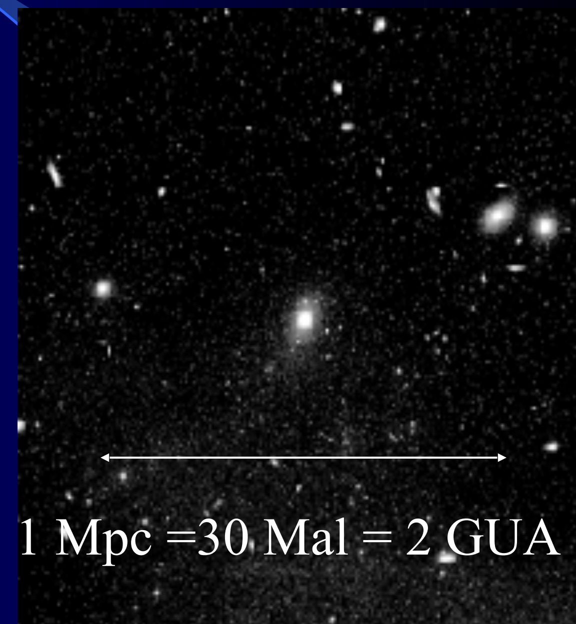
lago di Garda

$\alpha \sim 10^{-8}$



AG: M 13

$\alpha \sim 10^{-2}$



Ammasso di galassie

$\alpha \sim 10^{-2}$

I sistemi auto-gravitanti sono difficili da studiare per la *doppia divergenza* di $U_{ij} \propto 1/r_{ij}$

$\Downarrow$

1) divergenza UV $(\lim_{r_{ij} \to 0} U_{ij} = \infty)$ $\Rightarrow \Delta t \to 0$

2) divergenza IR (U_{ij} non si annulla mai) $\Rightarrow O(N^2)$

$\Downarrow$

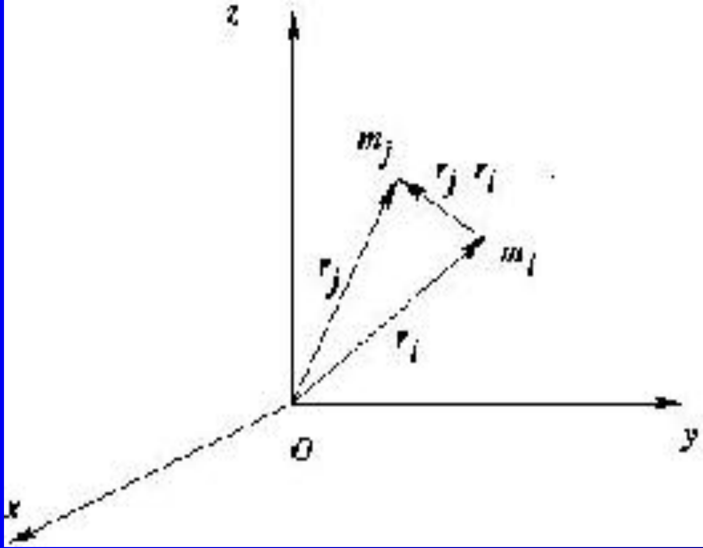
Problema a scale spazio-temporali multiple

$\Downarrow$

Impossibile usare metodi perturbativi

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Il problema gravitazionale classico degli *N* corpi (sistema *secco*)



$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right)$$

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \dot{\mathbf{r}}_{i0}$$

Indipendentemente da *N*, ci sono 10 integrali primi

Soluzioni analitiche solo per *N*=2.

Il sistema:

- è di complessità O(N^2);
- è lontano dalla linearità;
- ha pochi vincoli nello spazio delle fasi.

Il premio Oscar (re di Svezia):

Dato un sistema di punti di massa che si attraggono secondo la legge di Newton, nell'ipotesi di non avere collisioni, <u>trovare per le coordinate un'espressione in serie di una funzione nota del tempo, convergente uniformemente.</u>

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

- Il premio fu vinto da H. Poincarè, con un articolo che portò alla teoria del caos. Piccole differenze nelle c.i. portano a grandi differenze nell'evoluzione secolare degli *N* corpi.

- La soluzione per N=3 del problema del bando venne nel 1912 da K. Sundman che dimostrò l'esistenza di sviluppo in serie di potenze di $t^{1/3}$.

- Il risultato di Sundman generalizzato a ogni N nel 1991 da Q. Wang.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

I sistemi astrofisici reali non sono semplici *N corpi*…

Una fase *condensata* (*s) è immersa in una *diluita* (g)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v},$$ *eq. di continuità* g

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p - \rho\nabla(U_g + U_*),$$ *eq. del moto del gas* g+*

$$\rho\frac{du}{dt} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{v} - \Lambda + \Gamma,$$ *eq. dell'energia* g

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -\nabla(U_g + U_*)(i = 1,\ldots,N),$$ *eq. del moto stelle* g+*

$$\nabla U_*(\mathbf{r}) = -G\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$

$$\nabla^2 U_g = -4\pi G\rho,$$ *eq. di Poisson* g

$$f(p,\rho,T) = 0.$$ *eq. di stato* g

- *forza di pressione force* ∇p *(short-range)*
- *forza di gravità force* ∇U *(long-range)*

Sistemi astrofisici 3D auto-gravitanti sono ben rappresentabili lagrangianamente (sistemi di *particelle*: $*$=*N corpi*, *g*=SPH)

…tuttavia...

- fluttuazioni su piccola scala di $p(\mathbf{r})$ introducono grandi fluttuazioni of ∇p

  ⬇

  Basso costo computaz.; bassa precisione

- la forza di volume richiede $\propto(N_{SPH}+N_*)^2$ valutazioni

  ⬇

  Alto costo computaz.; alta precisione

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Profiling in una simulazione tipica

task	*tempo di Cpu*
valutazione delle forze gravitazionali, O(N^2)	**60%**
val. delle quantità fluido-dinamiche, O(n^2)	**25%**
integraz. temporale, O(N)	**15%**

la distanza euclidea…

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

è uno dei problemi…

Si usano vari algoritmi: Erone, Bombelli, Newton, dispendiosi computazionalmente…

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Problema 1: *valutazione* della forza $F_{ij}=\nabla U_{ij}$

35 flop

con un PE da v=1 G*flop/sec*,
$t_{ij}=3.5\times10^{-8}$*sec*

n_f = n. di op. *per* passo temporale

$$n_f = \binom{N}{2} 35\,flop = \frac{N(N-1)}{2} 35\,flop$$

$$t = n_f / \mathrm{v}$$

↗ N=1000 → n_f=1.5×10^7 *flop*
t = 1.8/100 sec

→ N=10^5 → n_f=1.5×10^{11} *flop*
t = 180 sec =3 min

↘ N=10^{11} → n_f=1.5×10^{23} *flop*
t = 1.8×10^{14}sec = 5.7 Myr!

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Problema 2 : *lunghezza delle* simulazioni

Coarse-grain: rilassamento violento t_{cross}

Fine-grain: rilassamento "collisionale" t_{rel}

$$t_{rel} \cong \frac{1}{10} \frac{N}{\log_e N} t_{cross}$$

→ $10\ t_{cross}$ ammasso aperto

→ $1000\ t_{cross}$ ammasso globulare

→ $4\text{x}10^8\ t_{cross}$ galassia

L'età di un a. globulare (~12 Gyr) is $\approx 2\times10^5\ t_{cross} \approx 200\ t_{rel} \Rightarrow$ 720 anni di simulazione!

2 quadcore Xeon
da 2 Ghz

+

2 TESLA C1060

=

Potenza:
~ 12 Gflops (CPU)
~ 2 Tflops (GPU)

Costo:
~ 7000 euro
~ 1000 W